

1

Fonctions du second degré.

Définition et représentation graphique

Définition

Fonction du second degré

Une fonction du second degré (ou *polynôme du second degré*) est une fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

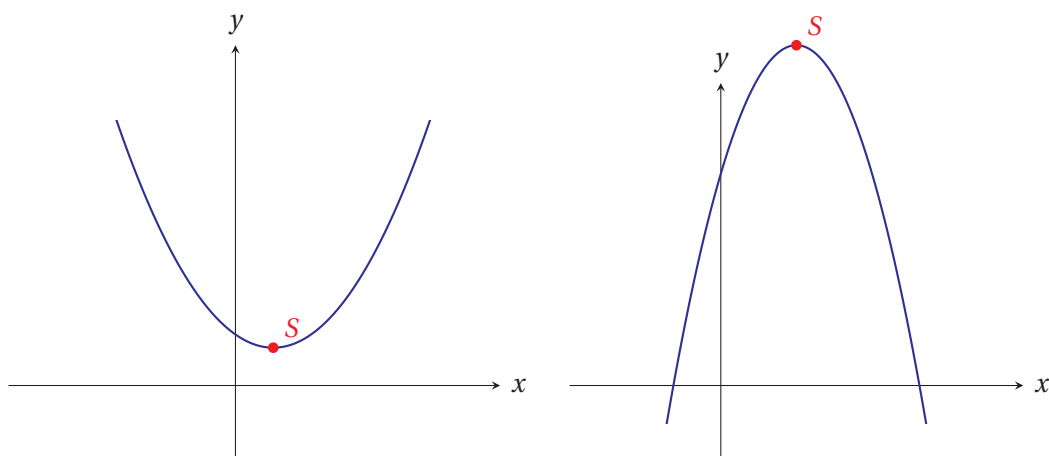
Définition

Parabole

La représentation graphique d'une fonction du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole**.

— Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut.

— Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas.



Propriété

Sommet de la parabole

Une parabole admet un sommet de coordonnées $S(\alpha, \beta)$ avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha) = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Définition

Forme canonique

La **forme canonique** d'une fonction du second degré est l'écriture

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = P(\alpha).$$

Démonstration

On part de $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, on obtient $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Propriété

Extrémum

Pour $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$, on a :

- si $a > 0$, P admet un **minimum** en $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$ de valeur $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$;
- si $a < 0$, P admet un **maximum** en $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$ de valeur $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

Propriété

Variations

On en déduit les tableaux de variations suivants

Cas $a > 0$ (minimum)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$

- Sur $] -\infty ; \alpha]$, f est décroissante.
- Sur $[\alpha ; +\infty [$, f est croissante.

Cas $a < 0$ (maximum)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$-\infty$	β	$-\infty$

- Sur $] -\infty ; \alpha]$, f est croissante.
- Sur $[\alpha ; +\infty [$, f est décroissante.

Racines et tableau de signes

Définition

Discriminant

Le **discriminant** d'une fonction du second degré, définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Propriété

Signe et racines

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et l'équation $P = 0$. Le nombre de solution de l'équation dépend du discriminant Δ .

$\Delta < 0$, L'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, on dit alors que P n'a pas de racine réelle.

$\Delta = 0$, L'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$, on dit alors que P a une racine double.

$\Delta > 0$, L'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes, $S = \{x_1, x_2\}$ avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration

Considérons la fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, et sa forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

$$f(x) = 0$$

$$a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$$

$$a(x - \alpha)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a(x - \alpha)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$(x - \alpha)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Cette équation admet des solutions si et seulement si $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$. Comme $4a^2$ est toujours positive, $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ dépend uniquement du signe de $b^2 - 4ac$, noté Δ .

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

$$S = \emptyset$$

— Si $\Delta = 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ l'équation a une solution.

$$(x - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

Démonstration

- Si $\Delta > 0$, l'équation n'a pas de solution.

$$(x - \alpha)^2 = \Delta$$

$$\text{Soit } x - \alpha = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$\text{Soit } x - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{Soit } x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} + \alpha$$

$$\text{Soit } x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b}{2a}$$

$$\text{Soit } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{Soit } x - \alpha = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$\text{Soit } x - \alpha = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{Soit } x = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} + \alpha$$

$$\text{Soit } x = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b}{2a}$$

$$\text{Soit } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

Propriété

Forme factorisée

Pour $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

- si $\Delta > 0$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines réelles ;
- si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a(x - x_1)^2$ où $x_1 = -\frac{b}{2a}$ est la racine double ;
- si $\Delta < 0$, P n'admet pas de forme factorisée sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Signe du polynôme

Le signe d'une fonction de second degré dépend de Δ et de a .

- Si $\Delta < 0$, alors le tableau de signe de la fonction f est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, alors le tableau de signe de la fonction f est :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$, alors le tableau de signe de la fonction f le suivant.

On suppose que $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	x_1	x_2	$+\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	