04

Quelques définitions et notations

• Opérations sur les événements

Définition — Événement contraire

On appelle événement contraire de A, noté $\overline{A}$ (se lit A barre), l'événement constitué de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple

Si F est l'événement "être une femme", alors $\overline{F}$ est l'événement contraire de F, c'est-à-dire "être un homme".

Définition — Intersection

On appelle intersection de A et de B, notée $A \cap B$ (se lit "A inter B"), l'événement constitué de toutes les issues qui sont communes à A et à B.

Exemple

Si F est l'événement "être une femme" et B l'événement "avoir les cheveux blonds", alors l'événement $F \cap B$ est l'événement "être une femme **et** avoir les cheveux blonds", c'est-à-dire les femmes blondes.

Définition — Union

On appelle union de A et de B, notée $A \cup B$ (se lit "A union B"), l'événement constitué de toutes les issues de A **ou** de B.

Exemple

Si C est l'événement "avoir les cheveux châtains" et B l'événement "avoir les cheveux blonds", alors l'événement $C \cup B$ est l'événement "avoir les cheveux châtains ou les cheveux blonds".

Définition

Événements incompatibles

On appelle événements incompatibles deux événements qui ne peuvent se produire en même temps. Autrement dit, A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple

L'événement $F \cap \overline{F}$ est l'événement correspondant à l'ensemble des suspects étant à la fois des femmes et des hommes, soit $F \cap \overline{F} = \emptyset$. Les événements F et $\overline{F}$ sont donc incompatibles.

• Notion de probabilité

Définition

Probabilité

Intuitivement, la probabilité d'un événement A inclus dans un univers Ω est le rapport de la partie liée à A sur Ω.
Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}}$$

Propriété

La probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1.
Pour tout événement A : $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

Exemple

Dans une population de 100 suspects, s'il y a 8 femmes blondes, la probabilité que le suspect soit une femme blonde est :

$$\mathbb{P}(B \cap F) = \frac{\text{Nombre de femmes blondes}}{\text{Nombre total}} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Propriété

Probabilité de l'événement contraire

Pour tout événement A :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)}$$

Exemple

Si la probabilité que le suspect soit une femme est $\mathbb{P}(F) = 0{,}41$, alors la probabilité que le suspect soit un homme est :

$$\mathbb{P}\left(\overline{F}\right) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$$

Probabilités conditionnelles

Définition

Probabilité conditionnelle

La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé se note $\mathbb{P}_B(A)$ et se lit "probabilité de A sachant B".
Elle est définie par :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \quad \text{avec } \mathbb{P}(B) \neq 0$$

Exemple

Dans une population de 100 suspects dont 41 femmes et 8 femmes blondes, la probabilité que le suspect soit blonde sachant que c'est une femme est :

$$\mathbb{P}_F(B) = \frac{\text{Nombre de femmes blondes}}{\text{Nombre de femmes}} = \frac{8}{41} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{41}{100}} = \frac{\mathbb{P}(B \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Propriété

A partir de la formule des probabilités conditionnelles, on obtient aussi deux autes relations :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}_B(A)}$

Arbres de probabilité

Méthode

Arbre de probabilité

La construction d'un arbre de probabilité (ou arbre pondéré) répond à trois règles :

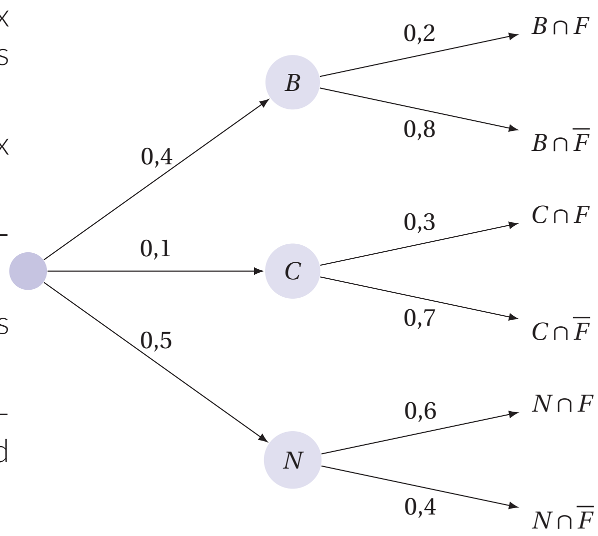
1. La somme des probabilités partant d'un même nœud est égale à 1.
2. La probabilité d'un chemin est le produit de toutes les probabilités rencontrées sur les branches qui forment ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Exemple

Modélisation de l'activité

Dans le contexte de l'activité les experts, nous savions que :

- Les suspects ont soit des cheveux blonds (**B**), soit des cheveux chatains (**C**), soit des cheveux noirs (**N**).
- 40% des suspects ont les cheveux blond ;
- 10% des suspects ont les cheveux chatains ;
- 60% des suspects aux cheveux noirs sont des femmes (**F**).
- 20% du matériel génétique relevé venant d'un individu aux cheveux blond est celui d'une femme.
- 70% du matériel génétique relevé provenant d'un individu aux cheveux châtain est celui d'un homme ($\overline{\text{F}}$).



Formule des probabilités totales

Définition

Partition de l'univers

Soit Ω un univers de probabilité.
On appelle **partition de l'univers** un ensemble d'événements $A_1, A_2, \dots, A_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

1. L'union de tous les événements forme l'univers :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n = \Omega$$

2. L'intersection de deux événements quelconques de cet ensemble est vide :

$$\text{Pour tout } i \text{ et } j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{avec } 1 \leq i, j \leq n \text{ et } i \neq j$$

Propriété

Formule des probabilités totales

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) une partition de l'univers.
Pour tout événement B :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B)}$$

Cette formule peut également s'écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{A_1}(B) \times \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B) \times \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}_{A_n}(B) \times \mathbb{P}(A_n)}$$

Événements indépendants

Définition

Événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

Propriété

Propriétés

On a également les équivalences suivantes :
A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

Exemple

On lance simultanément une pièce équilibrée et un dé équilibré.

- On note A l'événement : « la pièce donne Face ».
- On note B l'événement : « le dé donne un nombre strictement supérieur à 4 ».

On calcule les probabilités de ces événements :

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ (B =5, 6)

Considérons maintenant l'événement $A \cap B$: « la pièce donne Face **et** le dé donne un strictement supérieur à 4 ». Il y a 6 issues possibles pour le dé et 2 pour la pièce, soit 12 issues équiprobables au total. Parmi elles, les issues favorables à $A \cap B$ sont : $(Face, 5), \quad (Face, 6)$, soit 2 issues favorables.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Or on a :

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ainsi,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Conclusion : les événements A et B sont indépendants.