Généralités sur les arbres

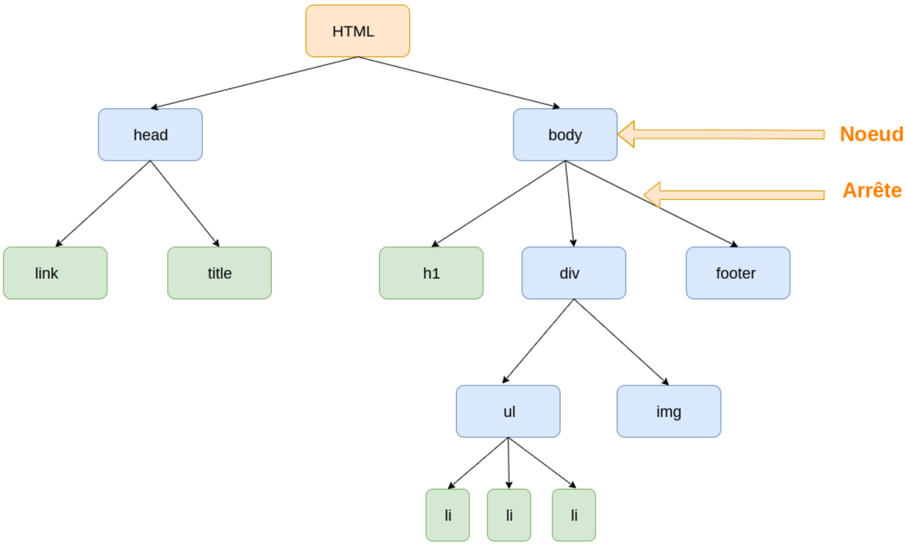
.

i Dans ce cours, les arbres utilisés dont des arbres enracinés.

• Vocabulaire

Définition — Arbres

Un arbre est un ensemble de noeuds reliés par des arrêtes.

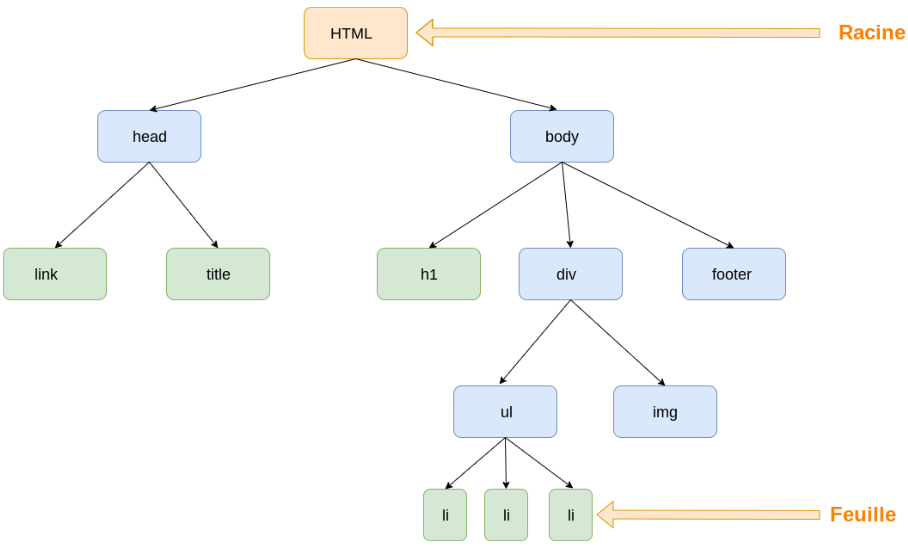


Les noeuds peuvent avoir une valeur, on l'appelle `l'étiquette` du noeud.

Définition — Racine et feuille

— Un arbre possède une `racine` si un noeud est au départ

— Une `feuille` est un noeud situé à l'extrémité de l'arbre. Il n'a donc pas de descendants.



Définition

Parent & enfants

Dans un arbre chaque noeud possède un parent et des enfants.

Dans notre arbre, le noeud body a pour parent HTML et 3 enfants h1 , div et footer .

• Métriques sur les arbres

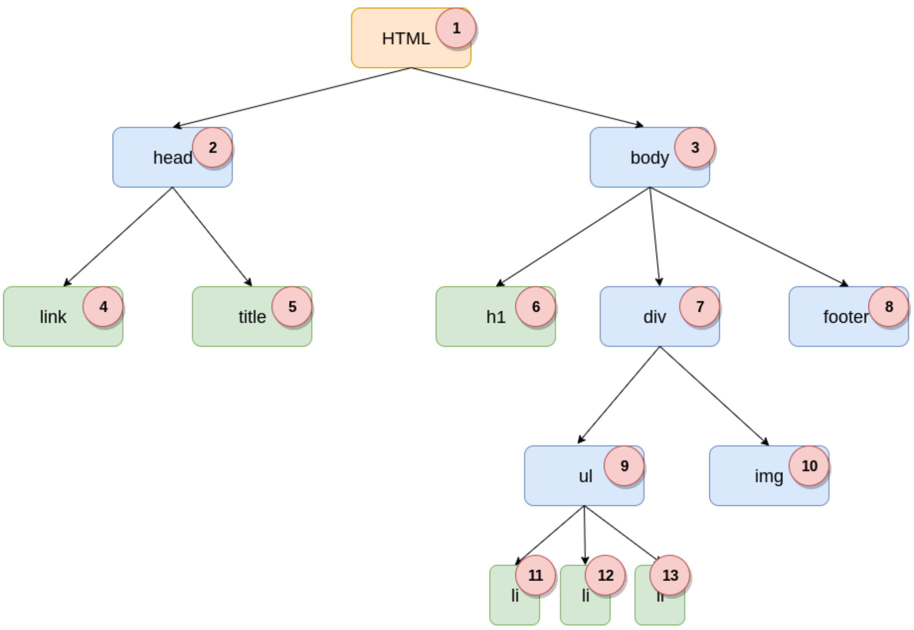
Définition

taille

La taille d'un arbre est le nombre de noeuds qu'il contient.

Exemple

Dans l'arbre qui nous sert d'exemple, il y a 13 noeuds



La `taille` de l'arbre est 13

Définition

Hauteur

La **`hauteur`** d'un arbre est le nombre de noeuds du plus long chemin qui joint le noeud racine à l'une des feuilles.

On a donc :

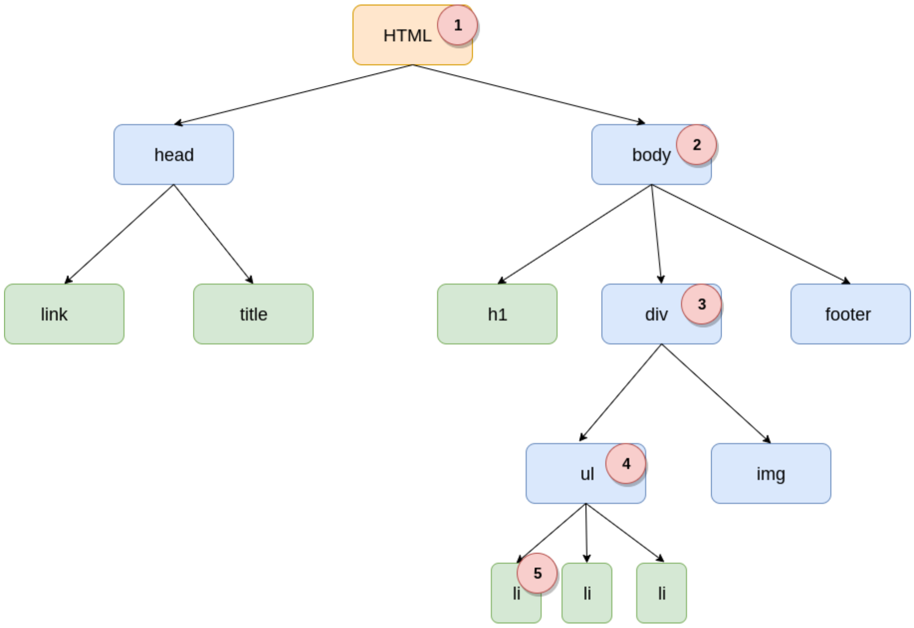
— La hauteur d'un arbre vide est 0

— La hauteur d'un arbre réduit à un noeud, c'est-à-dire la racine, est 1.

⚠ Cette définition varie en fonction des auteurs. Pour certains la hauteur d'un arbre vide est -1.
Nous utilisons dans ce cours, celle utiliser au baccalauréat 2021.

Exemple

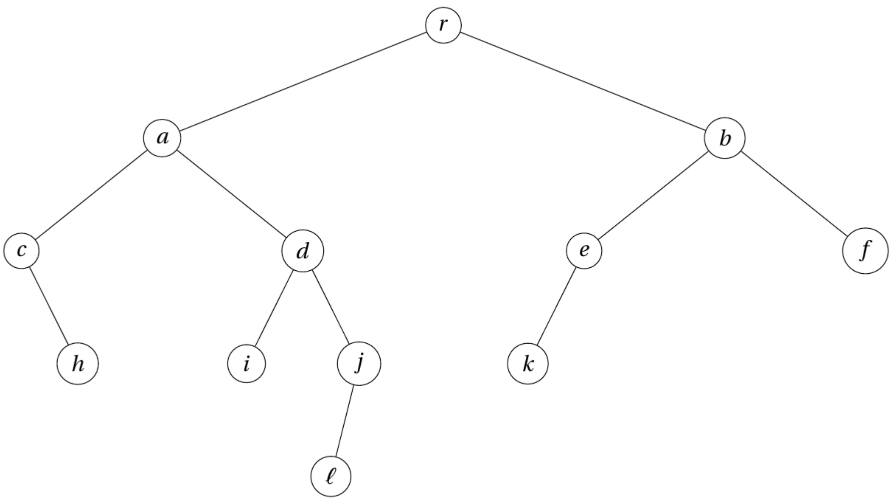
Dans l'arbre qui nous sert d'exemple, le plus long chemin possible se compose de 5 noeuds



La `hauteur` de l'arbre est 5.

Exercice 1 ★

Déterminer la taille et la hauteur de l'arbre suivant :



Arbre binaire

• Définition

Définition

Un `arbre binaire` est un arbre dont chaque élément possède au plus deux éléments enfants au niveau inférieur (un fils gauche et un fils droit).

• Encadrement de la hauteur d'un arbre

Propriété

Soit un arbre de taille n, alors la hauteur h est comprise entre $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ ($\lfloor \ldots \rfloor$ partie entière) et n

$$\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 \leq h \leq n$$

Les cas extrêmes étant un arbre filiforme et un arbre complet.

• Implementation

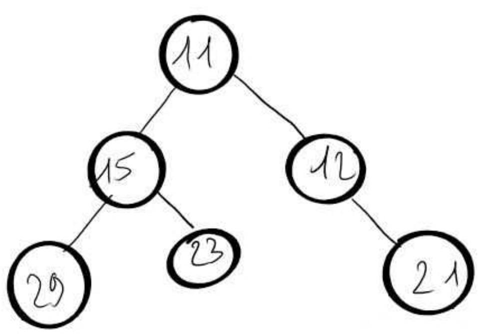
Une manière de représenter un arbre est de créer une classe `Noeud` ayant 3 attributs :

- `valeur` : l'étiquette du noeud.
- `gauche` : le fils gauche du noeud.
- `droit` : le fils droit du noeud.

```python
class Noeud:

    def __init__(self, valeur, gauche, droit):
        self.valeur = valeur
        self.gauche = gauche
        self.droit  = droit
```

Ainsi l'arbre ci dessous :



L'implémentation de cet arbre avec :

```python
A = Noeud(11,
        Noeud(15, Noeud(29, None, None), Noeud(23, None, None)),
        Noeud(12, None, Noeud(21, None, None))
    )
```

• Algorithmes

Dans ctitleette partie, nous allons étudier l'algorithme de calcul de la taille et la hauteur d'un arbre binaire.

Ces deux mesures se calculent récursivement.

La taille

- La taille d'un arbre binaire vide valent 0.
- La taille d'un arbre binaire non vide vaut :

  1 + taille(sous-arbre gauche) + taille(sous-arbre droit).

La hauteur

- La hauteur d'un arbre binaire vide valent 0.
- La hauteur d'un arbre binaire non vide vaut :

  1 + max(hauteur(sous-arbre gauche), hauteur(sous-arbre droit)).

```python
def taille(a):
    if a == None:
        return 0
    else:
        return 1 + taille(a.gauche) + taille(a.gauche)
```

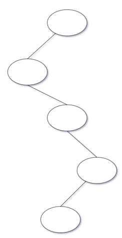
```python
def hauteur(a):
    if a == None:
        return 0
    else:
        return 1 + max(taille(a.gauche), taille(a.gauche))
```

Encadrement de la hauteur d'un arbre

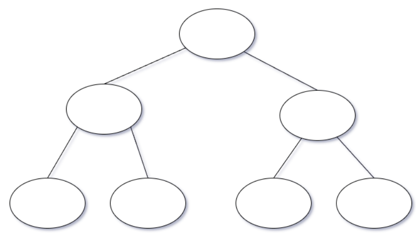
Définitions

Arbre parfait et arbre filaire

On dit qu'un arbre est filaire quand chaque noeud à un seul enfant.



Un arbre binaire parfait est un arbre binaire strict dans lequel toutes les feuilles sont à la même distance de la racine.



Définition

Relation entre taille et hauteur

Pour un arbre binaire la relation entre la taille N de l'arbre et sa hauteur h est donnée par l'inéquation :

$$log_2(N) - 1 \leq h \leq N$$

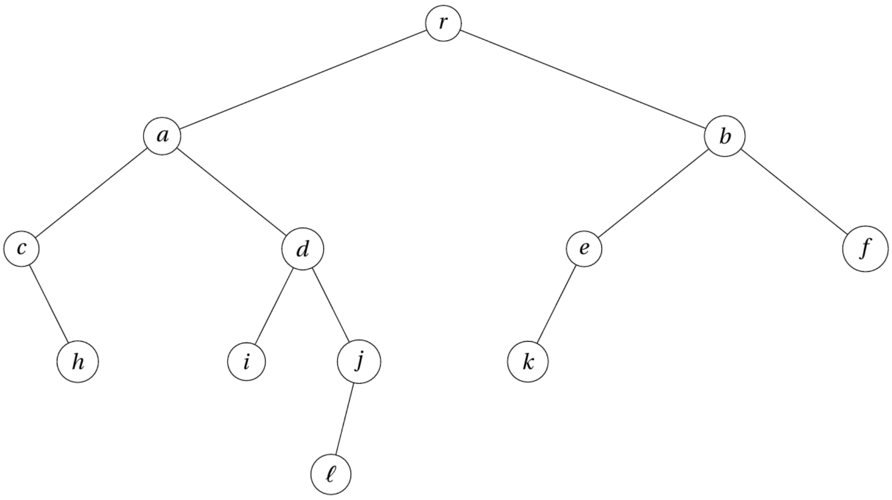
• Parcours

Dans cette partie, nous allons voir 4 méthodes de parcours des valeurs d'une arbre.

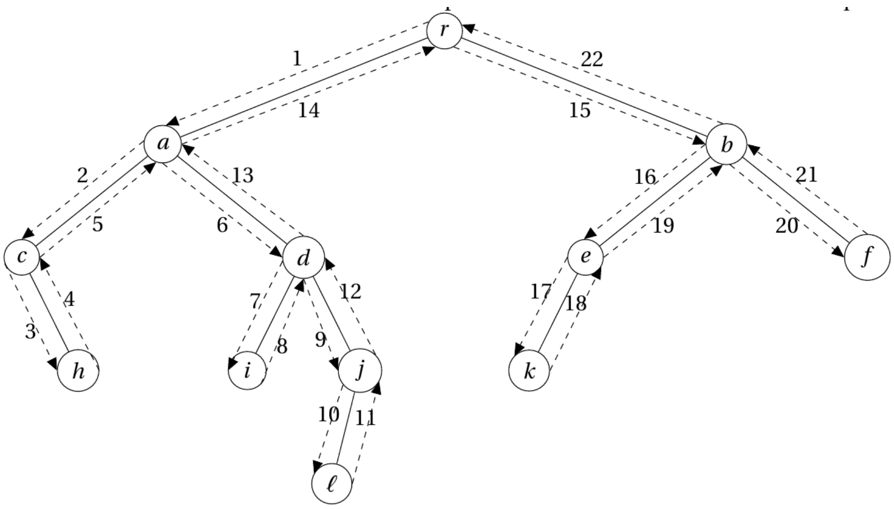
- `Parcours en profondeur :`
  - `Parcours préfixe`
  - `Parcours infixe`
  - `Parcours suffixe ou postfixe`
- `Parcours en largeur`

• • Parcours en profondeur

Nous allons considèrer l'arbre suivant.



Une balade sur l'arbre :

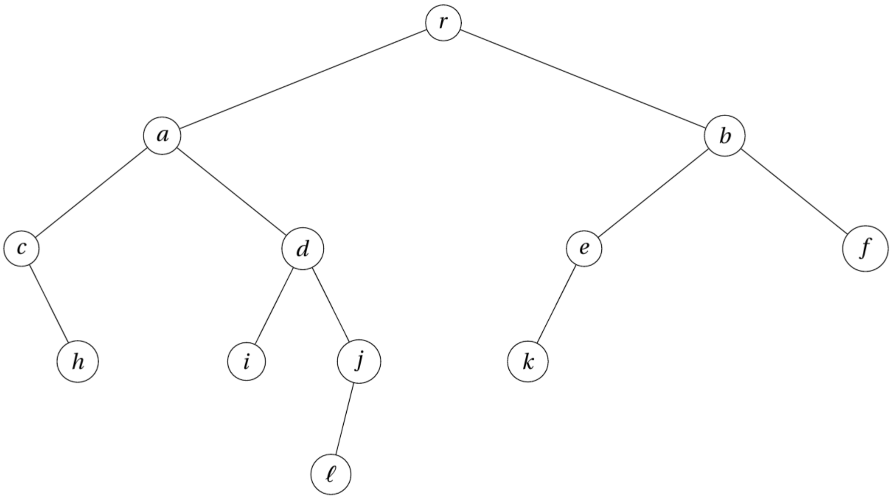


A partir de ce contour, on définit trois parcours des sommets de l'arbre :

- l'ordre **`préfixe`** : on liste chaque sommet la première fois qu'on le rencontre dans la balade (c'est à dire dès qu'on passe à sa gauche),
- l'ordre **`postfixe`** ou **`suffixe`** : on liste chaque sommet la dernière fois qu'on le rencontre. (c'est à dire dès qu'on passe à sa droite),
- l'ordre **`infixe`** : on liste chaque sommet ayant un fils gauche la seconde fois qu'on le voit et chaque sommet sans fils gauche la première fois qu'on le voit. (c'est à dire dès qu'on passe à en dessous).

Exercice 2

À partir de l'arbre ci-dessus.



1. Déterminer le parcours **`préfixe`** .

   ....

   ....
2. Déterminer le parcours **`postfixe`** de l'arbre ci-dessus.

   ....

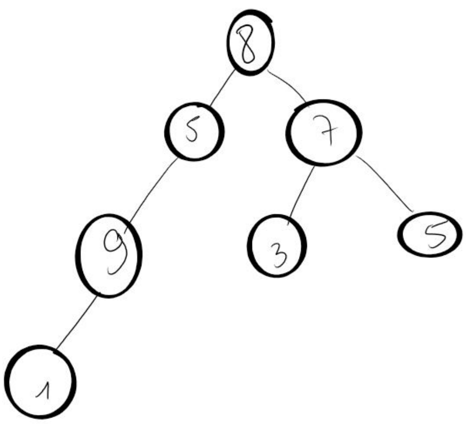
   ....
3. Déterminer le parcours **`infixe`** de l'arbre ci-dessus.

   ....

   ....

Exercice 3

À partir de l'arbre ci-dessous.



1. Déterminer le parcours **préfixe** .

   . . . .

   . . . .

2. Déterminer le parcours **postfixe** de l'arbre ci-dessous.

   . . . .

   . . . .

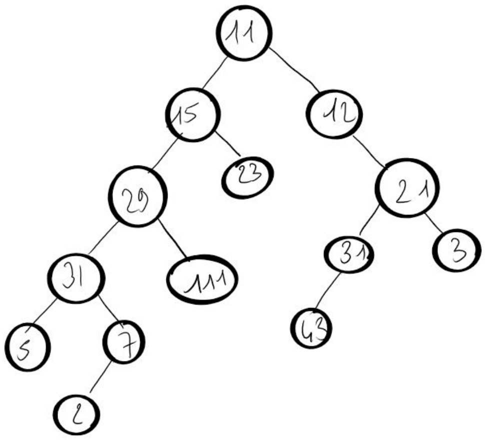
3. Déterminer le parcours **infixe** de l'arbre ci-dessous.

   . . . .

   . . . .

Exercice 4

À partir de l'arbre ci-dessous.



1. Déterminer le parcours `préfixe` de cet arbre.

   ....

   ....

2. Déterminer le parcours `suffixe` de cet arbre.

   ....

   ....

3. Déterminer le parcours `infixe` de cet arbre.

   ....

   ....

• Implémentation des parcours en profondeur

i Encore une fois, on va implémenter les parcours de manière **récursive**

On peut aussi définir ces 3 modes de parcours de cette façon.

- `Préfixe` : on lit d'abord la Racine (RGD) puis le sous arbre Gauche et ensuite le sous-arbre Droit
- `Suffixe` ou `postfixe` : on lit la Racine à la fin (GDR)
- `Infixe` : on lit la Racine au milieu de la séquence (GRD), infixe comme intérieur.

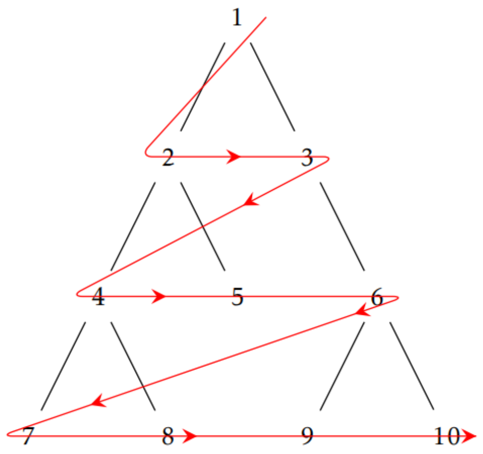
• Définition du parcours en largeur

Définition

Dans le cadre d'un parcours en largeur, on commence par la racine et ensuite de enumère les noeuds de d'une même profondeur de droite à gauche.

Exemple

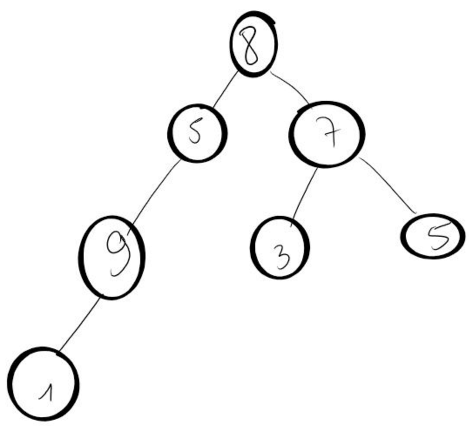
On considère l'arbre ci-dessous.



Le parcours en largeur de l'arbre ci-dessou, nous donnerais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

Exercice 5

À partir de l'arbre ci-dessous.



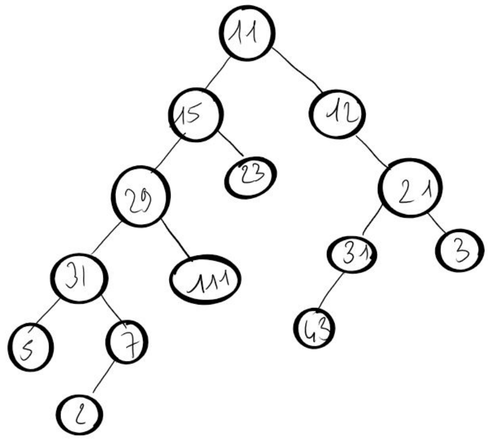
1. Déterminer le parcours en `largeur` de l'arbre ci-dessous.

   . . . .

   . . . .

Exercice 6

À partir de l'arbre ci-dessous.



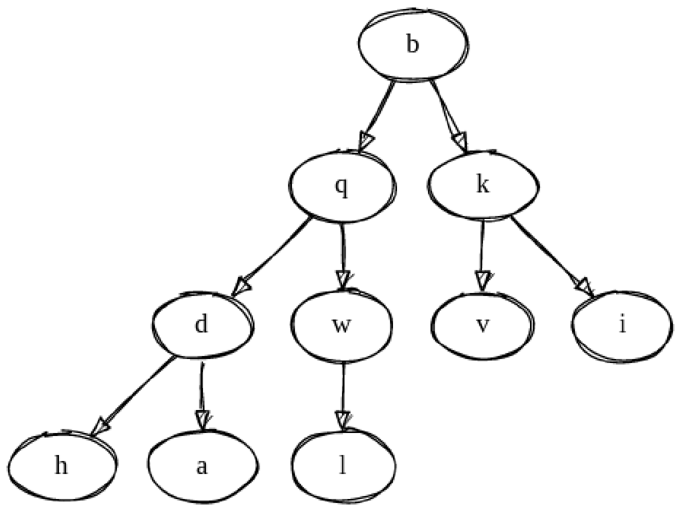
1. Déterminer le parcours en largeur de cet arbre.

   ....

   ....

Exercice 7

À partir de l'arbre ci-dessous.



1. Déterminer le parcours en largeur de cet arbre.

   ....

   ....

Implémentation du parcours en largeur