Algorithmes sur les graphes

Algorithme de Dijkstra

TP n° 4

Partie A — Le principe

Contexte : trouver le chemin le plus court

Plusieurs situations du quotidien se ramènent au même problème mathématique :

- Livraison de pizzas en moins de trente minutes avec un scooter poussif.
- Rejoindre la gare à pied en épargnant au maximum ses pieds et ses bras.
- Routage d'un paquet sur Internet : quelle route emprunter parmi des milliers de nœuds ?

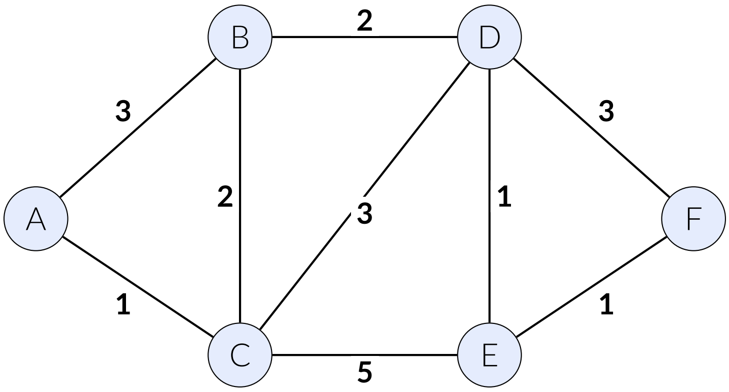
Dans tous ces cas, on cherche le **plus court chemin** dans un **graphe pondéré**.

Algorithme de Dijkstra

Edsger **Dijkstra** (on prononce *D–ail–k–stra*) proposa en **1959** un algorithme résolvant ce problème sur un graphe à poids positifs.
Principe général :

1. On attribue la distance 0 au sommet de départ et $+\infty$ à tous les autres.
2. On sélectionne le sommet *non traité* ayant la plus petite distance provisoire.
3. Pour chacun de ses voisins non traités, on met à jour la distance si le chemin passant par ce sommet est plus court.
4. On marque ce sommet comme *traité* et on recommence à l'étape 2.
5. Quand tous les sommets sont traités, on remonte le chemin depuis l'arrivée.

Important : l'algorithme ne fonctionne correctement qu'avec des **poids positifs ou nuls**.



Objectif : trouver le plus court chemin de **A** à **F**.

Étape 1 — Départ depuis A

- On initialise : A $= 0$, les autres sont à $+\infty$.
- Depuis A, on atteint B (distance 3) et C (distance 1). On note `3-A` et `1-A` (distance et prédécesseur).
- A est désormais **traité** (croix).
- La plus petite valeur non traitée est `1-A` en C.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
$\times$	3-A	**1-A**	∞	∞	∞
$\times$					
$\times$					
$\times$					
$\times$					

Étape 2 — Depuis C

- Depuis C (distance 1), on atteint :
  - B : $1 + 2 = 3 \rightarrow$ `3-C`, égal à `3-A`, on garde `3-A`.
  - D : $1 + 3 = 4 \rightarrow$ `4-C`, amélioration.
  - E : $1 + 5 = 6 \rightarrow$ `6-C`, amélioration.
- C est désormais **traité**.
- La plus petite valeur non traitée est `3-A` en B.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
$\times$	3-A	1-A	∞	∞	∞
$\times$	**3-A**	$\times$	4-C	6-C	∞
$\times$		$\times$			
$\times$		$\times$			
$\times$		$\times$			

Étape 3 — Depuis B

- Depuis B (distance 3), on atteint :
  - D : $3 + 2 = 5 \to$ `5-B`, mais `4-C` est meilleur, on garde `4-C`.
- B est désormais **traité**.
- La plus petite valeur non traitée est `4-C` en D.

A	B	C	D	E	F
×	3-A	1-A	∞	∞	∞
×	3-C	×	4-C	6-C	∞
×	×	×	**4-C**	6-C	∞
×	×	×			
×	×	×			

Étape 4 — Depuis D

- Depuis D (distance 4), on atteint :
  - E : $4+1 = 5 \to$ `5-D`, amélioration (était `6-C`).
  - F : $4 + 3 = 7 \to$ `7-D`, amélioration.
- D est désormais **traité**.
- La plus petite valeur non traitée est `5-D` en E.

A	B	C	D	E	F
×	3-A	1-A	∞	∞	∞
×	3-C	×	4-C	6-C	∞
×	×	×	4-C	6-C	∞
×	×	×	×	**5-D**	7-D
×	×	×	×		

Étape 5 — Depuis E

- Depuis E (distance 5), on atteint :
  - F : $5+1 = 6 \to$ `6-E`, amélioration (était `7-D`).
- E est désormais **traité**.
- F est sélectionné : `6-E`. Tous les sommets sont traités.

A	B	C	D	E	F
×	3-A	1-A	∞	∞	∞
×	3-C	×	4-C	6-C	∞
×	×	×	4-C	6-C	∞
×	×	×	×	5-D	7-D
×	×	×	×	×	**6-E**

Chemin le plus court

Reconstruction du chemin : on remonte les prédécesseurs depuis F :

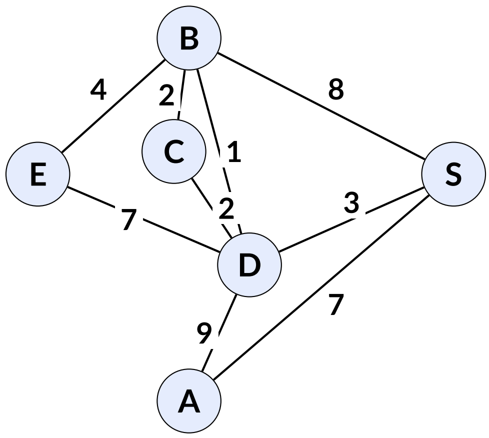
$$\text{F} \xleftarrow{\text{6-E}} \text{E} \xleftarrow{\text{5-D}} \text{D} \xleftarrow{\text{4-C}} \text{C} \xleftarrow{\text{1-A}} \text{A}$$

Plus court chemin : A → C → D → E → F, distance = 6.

Partie B — Spectacle de fin d'année

Exercice 1 — Chemin de vélo

Naïma fait partie d'une école de musique. Elle souhaite déposer à vélo des affiches publicitaires sur les panneaux de sa ville avant de rejoindre la salle de spectacle.
Le graphe ci-dessous représente les pistes cyclables. Le sommet **E** désigne son école de musique, le sommet **S** la salle de spectacle, et les sommets **A**, **B**, **C**, **D** les panneaux d'affichage. Les poids sont des durées en **minutes**.



Question 1 — Plus court chemin E → S

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin permettant à Naïma de se rendre le plus rapidement possible de son école **E** à la salle de spectacle **S**.
Compléter le tableau de suivi ci-dessous, puis indiquer le chemin et sa durée.

E	B	C	D	S	A

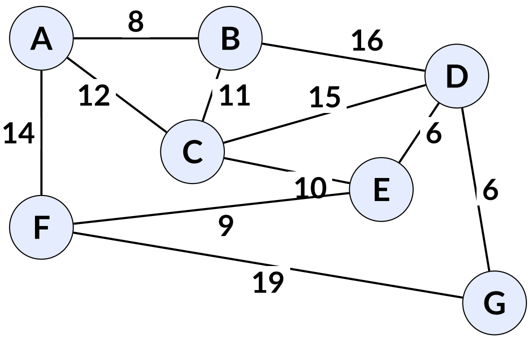
Plus court chemin : ....

Durée : ....

Partie C — L'agent immobilier

Exercice 2 — Retour au bureau ★★

Un agent immobilier termine ses visites en **A** et souhaite rejoindre le bureau en **G** le plus rapidement possible. Le graphe ci-dessous représente le plan de la ville. Les poids sont des durées de parcours en **minutes**.



Question 2 — Plus court chemin A → G

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin le plus court de **A** à **G**. Compléter le tableau ci-dessous puis indiquer le chemin et sa durée.

A	B	C	D	E	F	G

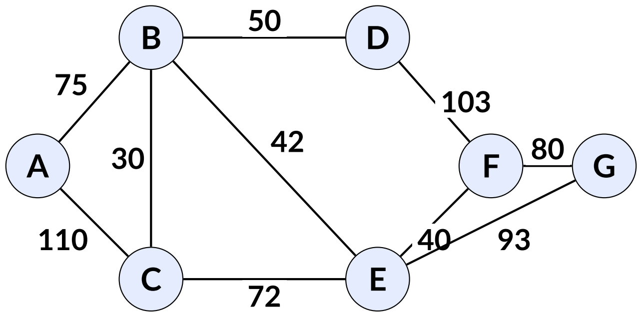
Plus court chemin : ....

Durée : ....

Partie D — Au centre de vacances

Exercice 3 — Allées du centre ★★

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent des allées et les sommets des carrefours. Les poids sont des longueurs en **mètres**.



Question 3 — Plus court chemin A → G

Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller du carrefour **A** au carrefour **G**. Indiquer le chemin et sa longueur en mètres.

A	B	C	D	E	F	G

Plus court chemin : ....

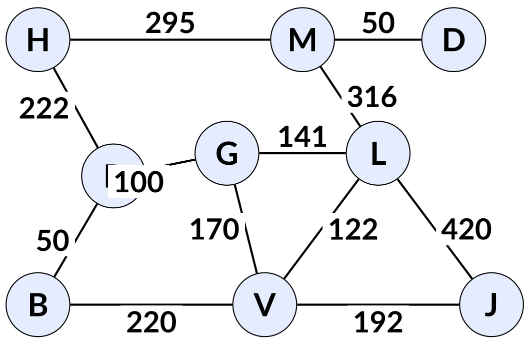
Longueur : ....

Partie E — Voyage en Islande

Exercice 4 — Itinéraire islandais ★★★

Sarah, étudiante en géologie, prépare un voyage en Islande. Elle a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les sites à visiter et les arêtes les routes, avec les distances en **kilomètres**.

B	Lagon bleu	**H**	Rocher Hvitserkur	**M**	Lac de Mývatn
D	Chute Dettifoss	**J**	Lagune Jökulsárlón	**R**	Capitale Reykjavik
G	Geyser de Geysir	**L**	Massif Landmannalaugar	**V**	Ville de Vik



Question 4 — Plus court chemin B → D

Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale pour aller du **Lagon bleu (B)** à la **Chute de Dettifoss (D)**.
Préciser le trajet à emprunter.

B	R	H	G	M	L	V	J	D

Trajet : . . . .

Distance minimale : . . . .